ISRAEL JOURNAL OF MATHEMATICS, Vol. 30, Nos. 1-2, 1978

APPLICATION DES INEQUATIONS QUASI-VARIATIONNELLES A QUELQUES PROBLEMES NON LINEAIRES DE LA PHYSIQUE DES PLASMAS

PAR

J. MOSSINO

ABSTRACT

This paper deals with some problems arising in plasma physics. The typical example is the following:

$$-\Delta u + \bar{\beta}(u) = f \text{ in } \Omega \ (\Omega \text{ a bounded open set in } \mathbf{R}^n),$$
$$u = 0 \text{ on } \partial\Omega,$$

where $\bar{\beta}$ is the (neither local, nor monotone, nor continuous) operator:

$$\bar{\beta}(u)(x) = \operatorname{meas}\{y \in \Omega, u(y) \leqq u(x)\}.$$

Using a quasi-variational approach, we prove the existence of minimal and maximal solutions for a weak form of this problem, involving a multi-valued operator β. Various generalizations are treated.

Introduction

La théorie des inéquations quasi-variationnelles (ou I.Q.V.), introduite par J. L. Lions, A. Bensoussan [5], et L. Tartar [42], est apparue récemment comme un outil particulièrement intéressant pour la résolution de problèmes apparaissant en économie et en physique. En particulier C. Baïocchi [4] l'utilise dans une nouvelle formulation d'un problème d'hydraulique. Nous l'appliquons ici à la résolution d'un problème non linéaire issu de la physique des plasmas.

La problème type étudié dans cet article est:

$$(*) \qquad \begin{cases} -\Delta u + \bar{\beta}(u) = f \text{ dans } \Omega, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

Received December 21, 1976 and in revised form July 4, 1977

où

$$\bar{\beta}(u)(x) = \text{mes}\{y \mid u(y) \leqq u(x)\}.$$

Il est évidemment non linéaire, et l'opérateur $\bar{\beta}$ n'est ni local, ni monotone (ni continu).

Le problème (*) est lié à l'étude de l'équilibre d'un plasma confiné. Le terme "$\bar{\beta}(u)$" a une signification physique que nous n'exposerons pas ici. Signalons simplement que C. Mercier a été amené à l'introduire en examinant le comportement quand $t \to \infty$ des équations de la M.H.D., tandis que pour H. Grad et al. [11] l'apparition de ce terme provient de considérations de fluides adiabatiques.

Nous montrons que le problème (*) admet une formulation I.Q.V qui s'inscrit dans un cadre général développé au Chapitre I. Nous prouvons l'existence d'au moins une solution de l'I.Q.V. par le théorème de Leray–Schauder; nous précisons ce résultat par la méthode "des suites monotones" (appelée aussi "des sur—et sous—solutions"), et nous donnons une preuve constructive de l'existence d'une solution minimale et d'une solution maximale. La formulation I.Q.V. du problème fait apparaître un opérateur multivoque $\beta(.)$, et, sur un espace produit, un opérateur multivoque $\beta(.,.)$ non local mais monotone en un sens défini dans le texte. Ainsi l'I.Q.V. attachée à (*) s'écrit

$$(**) \qquad \begin{cases} -\Delta u + \beta(u, u) = -\Delta u + \beta(u) \ni f \text{ dans } \Omega, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

Cette méthode de résolution permet deux types de généralisations. Dans (*), on peut par exemple remplacer $-\Delta$ par un opérateur A non linéaire monotone, qui vérifie le principe du maximum, et introduire des contraintes d'inégalité. On obtient alors des problèmes du type considéré au Chapitre II, Paragraphe 2. On peut également généraliser le terme $\bar{\beta}(u)$ et résoudre des problèmes tels que

$$(***) \qquad \begin{cases} -\Delta u + \partial_1 G(u, u) \ni f \text{ dans } \Omega, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

où $\partial_1 G$ désigne le sous-différentiel, par rapport à la première variable, d'une fonctionnelle $G(.,.)$ à préciser. On fait ainsi apparaître une classe d'opérateurs multivoques $\partial_1 G(.,.)$ non locaux qui possèdent la même propriété de monotonie que $\beta(.,.)$ et relèvent des mêmes techniques.

Cette étude nous amène naturellement à considérer (*) sous l'angle de l'analyse multivoque. Ce point de vue, qui ouvre la voie à des généralisations différentes des précédentes, est développé dans [29], [31], et [32].

L'auteur remercie R. Temam qui lui a proposé ce travail et l'a aidée par ses conseils judicieux, ainsi que C. Mercier (Service des Plasmas, C.E.A., Fontenay-aux-Roses) qui est à l'origine du problème (Communication personnelle à R. Temam).

Chapitre I. Deux Théorèmes d'existence "abstraits"

1. *Le problème d'inéquation quasi-variationnelle*

Soient V et Φ deux espaces de Banach réels, V étant réflexif et inclus dans Φ. On suppose que l'injection $V \hookrightarrow \Phi$ est compacte.

Soit J une fonctionnelle définie sur $V \times \Phi$, à valeurs dans $]-\infty, +\infty]$, et qui vérifie:

(i) J est s.c.i. sur V faible $\times$ Φ fort,

(ii) Pour tout φ de Φ, $v \to J(v, \varphi)$ est convexe, propre[†] et coercive au sens:

Il existe v_0 dans V tel que

$$J(v, \varphi) - J(v_0, \varphi) \to +\infty$$

uniformément par rapport à φ, lorsque $\|v\|_V \to +\infty$,

(iii) Pour tout v de V, $\varphi \to J(v, \varphi)$ est continue sur Φ.

On recherche u dans V solution de l'inéquation quasi-variationnelle (I.Q.V.):

$$J(u, u) \leqq J(v, u), \quad \forall v \in V. \tag{1}$$

L'inéquation (1) est appelée I.Q.V. car le second membre dépend de la solution u.

Nous donnons dans ce chapître deux théorèmes d'existence pour cette I.Q.V. "abstraite". Le premier se démontre par le théorème de Leray–Schauder et le second, qui est constructif, utilise la méthode de monotonie des sur et sous-solutions.

2. *Existence par le théorème de Leray–Schauder*

Sous les hypothèses précédentes on a un premier théorème d'existence.

THÉORÈME 1. *On suppose que J vérifie les hypothèses* (i) *à* (iii). *Le problème* (1) *admet alors au moins une solution u dans V.*

DÉMONSTRATION. La preuve repose sur le théorème de point fixe de Leray–Schauder et opère par régularisation en l'absence de stricte convexité.

[†] c'est-à-dire non identique à $+\infty$

Nous démontrons d'abord le théorème en supposant $J(.,\varphi)$ *strictement convexe* sur son domaine effectif, c'est-à-dire sur $\{v \in V \mid J(v,\varphi) < +\infty\}$. On établit alors le résultat ci-après.

LEMME 1. *Soit φ fixé dans Φ. Le problème d'optimisation $\mathcal{P}_\varphi$:*

$$\inf_{v \in V} J(v,\varphi) \tag{2}$$

admet une solution unique u_φ dans V, qui vérifie:

$$\|u_\varphi\|_V \leqq C, \tag{3}$$

où C est une constante indépendante de φ.

D'autre part l'application T qui à φ associe u_φ est continue de Φ dans lui-même.

DÉMONSTRATION DU LEMME 1. La fonctionnelle $J(.,\varphi)$ à minimiser sur V est convexe, s.c.i., propre, strictement convexe sur son domaine effectif. Et d'après (ii) elle vérifie

$$J(v,\varphi) \to +\infty \quad \text{quand} \quad \|v\|_V \to +\infty.$$

Le problème d'optimisation $\mathcal{P}_\varphi$ admet donc une solution unique u_φ (cf. par exemple Ekeland–Temam [9] p. 34).

Nous avons alors:

$$J(u_\varphi,\varphi) - J(v_0,\varphi) \leqq 0,$$

et ceci implique, grâce à (ii):

$$\|u_\varphi\|_V \leqq C,$$

où C est une constante indépendante de φ.

Cette estimation à priori va nous servir à démontrer la continuité de l'application T. Soit φ_n une suite que converge vers φ dans Φ, soit u_n la solution de $\mathcal{P}_{\varphi_n}$ et u_φ la solution de $\mathcal{P}_\varphi$. Nous allons montrer que u_n tend vers u_φ dans Φ. D'après l'estimation à priori (3), et la compacité de V dans Φ, on peut extraire une sous suite, notée encore u_n, telle que:

$$u_n \rightharpoonup u \quad \text{dans } V \text{ faible},$$

$$u_n \to u \quad \text{dans } \Phi \text{ fort}.$$

Comme u_n est la solution de $\mathcal{P}_{\varphi_n}$,

$$J(u_n, \varphi_n) \leqq J(v, \varphi_n), \quad \forall v \in V,$$

d'où

$$\underline{\lim}\, J(u_n, \varphi_n) \leqq \underline{\lim}\, J(v, \varphi_n), \quad \forall v \in V.$$

Utilisant maintenant les hypothèses (i) et (iii), on obtient:

$$J(u, \varphi) \leqq J(v, \varphi), \quad \forall v \in V,$$

c'est à dire que $u = u_\varphi$, l'unique solution de $\mathcal{P}_\varphi$. Il est alors classique que c'est toute la suite u_n (et non une sous-suite) qui converge dans Φ fort, ce qui achève la démonstration de la continuité de T.

Nous sommes maintenant en mesure d'appliquer le théorème de point fixe de Leray–Schauder. Soit C la constante qui intervient dans l'estimation (3), et soit:

$$B = \{v \in V \mid \|v\|_V \leqq C\}.$$

Par la compacité de l'injection de V dans Φ, B est compact dans Φ; B est donc un convexe compact de Φ, invariant par l'application continue T. Il existe par suite un point fixe $u = Tu$ dans B, ce qui s'écrit encore: il existe u dans B qui vérifie (1).

En *l'absence de stricte convexité*, on définit, pour $\varepsilon > 0$ fixé, J_ε par:

$$J_\varepsilon(v, \varphi) = J(v, \varphi) + \varepsilon \|v\|_V^2.$$

D'après ce qui précède, il existe u_ε dans V tel que

$$J_\varepsilon(u_\varepsilon, u_\varepsilon) \leqq J_\varepsilon(v, u_\varepsilon), \quad \forall v \in V,$$

d'où, avec l'élément v_0 qui intervient dans l'hypothèse (ii),

$$J(u_\varepsilon, u_\varepsilon) + \varepsilon \|u_\varepsilon\|_V^2 \leqq J(v_0, u_\varepsilon) + \varepsilon \|v_0\|_V^2,$$

et par suite

$$J(u_\varepsilon, u_\varepsilon) - J(v_0, u_\varepsilon) \leqq \varepsilon \|v_0\|_V^2.$$

Le deuxième membre tend vers zero quand ε tend vers zero. D'après l'hypothèse (ii), u_ε est donc borné dans V indépendamment de ε, et l'on peut extraire une sous-suite, notée encore u_ε telle que:

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u \quad \text{dans } V \text{ faible},$$

$$u_\varepsilon \to u \quad \text{dans } \Phi \text{ fort}.$$

On peut alors passer à la limite dans les inéquations

$$J(u_\varepsilon, u_\varepsilon) \leqq J(u_\varepsilon, u_\varepsilon) + \varepsilon \| u_\varepsilon \|_V^2 \leqq J(v, u_\varepsilon) + \varepsilon \| v \|_V^2, \quad \forall v \in V.$$

Il vient:

$$\underline{\lim}\, J(u_\varepsilon, u_\varepsilon) \leqq \underline{\lim}\, J(v, u_\varepsilon), \quad \forall v \in V,$$

d'où en utilisant les hypothèses (i) et (iii)

$$J(u, u) \leqq J(v, u), \quad \forall v \in V,$$

c'est à dire que u est solution du problème d'I.Q.V. associé à J. ■

Pour une démonstration directe qui utilise le théorème de Kakutani–Ky Fan, nous renvoyons le lecteur à [29].

3. *La méthode des suites monotones*

Nous allons montrer maintenant que la méthode des suites monotones permet de préciser le théorème d'existence 1.

Nous supposerons à présent Φ ordonné par une relation d'ordre notée $\leqq$, associée à un cône fermé P d'éléments positifs. Nous supposerons P *normal* (cf. Amann [3]) c'est-à-dire:

$$\exists \delta > 0 \text{ tel que } \forall x \in P,\ \forall y \in P,\ x \leqq y \Rightarrow \| x \| \leqq \delta \| y \|.$$

Dans la suite J verifiera les hypothèses (i) à (iii), ainsi que

(ii)′ Pour tout φ de Φ, $v \to J(v, \varphi)$ est strictement convexe sur son domaine effectif.

Nous utiliserons les notations T et u_φ introduites au Lemma 1. Nous commençons par rappeler une définition.

Définition. L'élément φ de Φ est une sous-solution (resp′ une sur-solution) de l'I.Q.V. (1) s'il vérifie

$$\varphi \leqq T\varphi \quad (\text{resp}'\, \varphi \geqq T\varphi).$$

Nous faisons sur T les deux hypothèses supplémentaires:

(iv) L'application T est croissante,

(v) Il existe une sous-solution u_0 et une sur-solution u^0 telles que:

$$\forall \varphi \in \Phi \quad u_0 \leqq T\varphi \leqq u^0.$$

Nous pouvons alors donner un *procédé constructif*, dit "des suites monotones" (cf. dans un autre contexte H. Amann [2], D. H. Sattinger [38] et L. Tartar [42]), qui conduit au théorème plus précis ci-après.

Théorème 2. *Sous les hypothèses* (i) *à* (v), *le problème d'I.Q.V.* (1) *admet* *une solution minimale* $\underline{u}$ *et une solution maximale* $\bar{u}$ *dans V, c'est-à-dire que toute autre solution u de* (1) *vérifie*:

$$\underline{u} \leqq u \leqq \bar{u}.$$

DÉMONSTRATION. La démonstration constructive que nous donnons utilise le lemme technique suivant.

LEMME 2. *Soit* u_n (resp^t u^n) *la suite dans V construite à partir de* u_0 (resp^t u^0) *par le procédé*:

$$u_{n+1} = Tu_n \tag{4}$$

(resp^t (5) $\qquad u^{n+1} = Tu^n$), $\quad n \geqq 0$.

Alors u_n *est une suite croissante de sous-solutions, et* u^n *est une suite décroissante de sur-solutions.*

DÉMONSTRATION DU LEMME 2. Nous allons montrer par exemple que u_n est une suite croissante de sous-solutions. Notons d'abord que u_n est une sous-solution si et seulement si $u_{n+1} \geqq u_n$.

Supposant alors $u_n \geqq u_{n-1}$ (vrai pour $n = 1$, puisque u_0 est sous-solution), on obtient immédiatement $u_{n+1} \geqq u_n$, grace à l'hypothèse (iv). Le raisonnement est identique pour la suite u^n.

Avant de montrer que l'on obtient à la limite la solution minimale $\underline{u}$ et la solution maximale $\bar{u}$ du Théorème 2, nous allons établir un lemme préliminaire.

LEMME 3. *Les assertions suivantes sont équivalentes*:

A) *P est normal,*

B) $\exists k > 0$, $\forall R > 0$, $\forall u_1, u_2, u, v \in \Phi$,

$$\left.\begin{array}{r} \|u_1 - u\| \leqq R \\ \|u_2 - u\| \leqq R \\ u_1 \leqq v \leqq u_2 \end{array}\right\} \Rightarrow \|v - u\| \leqq kR.$$

DÉMONSTRATION DU LEMME 3. Supposons A. Soient $R > 0, u_1, u_2, u$ et v dans Φ, tels que $\|u_1 - u\| \leqq R$, $\|u_2 - u\| \leqq R$, $u_1 \leqq v \leqq u_2$. Nous avons $v - u_1 \in P$, $u_2 - u_1 \in P$, et $v - u_1 \leqq u_2 - u_1$ (puisque $u_2 - v \in P$). Comme P est normal on en déduit $\|v - u_1\| \leqq \delta\|u_2 - u_1\|$. Alors

$$\begin{aligned} \|v - u\| &\leqq \|v - u_1\| + \|u_1 - u\| \\ &\leqq \delta(\|u_2 - u\| + \|u - u_1\|) + \|u - u_1\| \\ &\leqq (2\delta + 1)R. \end{aligned}$$

On a donc B, avec $k = 2\delta + 1$.

Réciproquement, supposons B. Soient x et y dans P, avec $x \leqq y$. On pose $u_1 = 0$, $u_2 = y$, $u = 0$, $v = x$ et $R = \|y\|$. On a alors:

$$\|u_1 - u\| \leqq R; \qquad \|u_2 - u\| \leqq R \quad \text{et} \quad u_1 \leqq v \leqq u_2.$$

D'après B, on en déduit $\|v - u\| \leqq kR$, c'est-à-dire $\|x\| \leqq k\|y\|$, et on a A avec $\delta = k$.

Nous achevons maintenant la démonstration du Théorème 2 par le lemme ci-après:

LEMME 4. *Lorsque n tend vers l'infini, on a les convergence suivantes:*

$$\left.\begin{aligned} &u_n \nearrow \underline{u} && (6)\\ &u^n \searrow \bar{u} && (7)\end{aligned}\right\} \text{dans } \Phi \text{ fort},$$

où $\underline{u}$ et $\bar{u}$ sont dans V, et sont respectivement la solution minimale et la solution maximale de l'I.Q.V. (1).

DÉMONSTRATION DU LEMME 4. D'après l'estimation à priori (3), la compacité de V dans Φ, et le Lemme 2, on peut extraire de u_n une sous suite, notée u_{n_i}, telle que $u_{n_i} \nearrow \underline{u}$ dans Φ fort. Alors:

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists I, \ \forall i, \ i \geqq I \Rightarrow \|u_{n_i} - \underline{u}\|_\Phi \leqq \varepsilon / k$$

(k est celui qui intervient dans le Lemme 3). Soit $N = n_I$, et soit $n \geqq N$. Il existe $j \geqq I$ tel que $n_I \leqq n \leqq n_j$, et, comme u_n est une suite croissante:

$$u_{n_I} \leqq u_n \leqq u_{n_j}.$$

Maintenant, $\|u_{n_I} - \underline{u}\| \leqq \varepsilon / k$, $\|u_{n_j} - \underline{u}\| \leqq \varepsilon / k$, et $u_{n_I} \leqq u_n \leqq u_{n_j}$. On en déduit, d'après le Lemme 3, $\|u_n - \underline{u}\| \leqq \varepsilon$, c'est-à-dire que toute la suite u_n converge vers $\underline{u}$, et non seulement une sous suite.

Comme $u_{n+1} = Tu_n$, avec T continue de Φ fort dans lui-même d'après le Lemme 1, on obtient par passage à la limite dans Φ: $\underline{u} = T\underline{u}$, c'est-à-dire que $\underline{u}$ est solution de l'I.Q.V. (1) (en particulier $\underline{u}$ est dans V).

De même $u^n \searrow \bar{u}$ dans Φ fort, où $\bar{u}$ est solution de (1).

Il reste à démontrer que $\underline{u}$ est la solution minimale et $\bar{u}$ la solution maximale. Soit u une solution quelconque; on a d'après l'hypothèse (v):

$$u_0 \leqq u = Tu \leqq u^0.$$

Supposant alors $u_{n-1} \leqq u \leqq u^{n-1}$, l'hypothèse (iv) donne $u_n \leqq u \leqq u^n$. Cette double inégalité est donc démontrée par récurrence pour tout n. Utilisant les convergences dans Φ fort, et le fait que P est fermé, on obtient par passage à la limite:

$$\underline{u} \leqq u \leqq \bar{u},$$

ce qui achève la démonstration du Lemme 4, et du Théorème 2.

En résumé, pour les suites monotones définies au Lemme 2, et pour toute solution u de l'I.Q.V. (1), nous avons:

$$u_0 \leqq \cdots \leqq u_n \leqq u_{n+1} \leqq \cdots \leqq \underline{u} \leqq u \leqq \bar{u} \leqq \cdots \leqq u^{n+1} \leqq u^n \leqq \cdots \leqq u^0.$$

■

REMARQUE. On peut donner une démonstration non constructive du Théorème 2, qui n'utilise pas la continuité de l'application T (supposée définie!), mais essentiellement les hypothèses (iv) et (v), dans le cas où Φ est un treillis† et est supposé réflexif.

Cette démonstration reprend une idée de L. Tartar [27] (p. 138, 139).

Soit

$$\underline{u} = \operatorname*{Inf}_{\varphi \in \bar{S}} \varphi,$$

où $\bar{S}$ est le sous ensemble de Φ formé des sur-solutions.

Montrons d'abord que $\underline{u}$ est défini dans Φ. Il suffit d'après H. H. Schaefer [39] (p. 224) de montrer que $\bar{S}$ est minoré dans Φ et tel que tout sous-ensemble $\{\varphi, \psi\}$ de $\bar{S}$ possède un minorant dans $\bar{S}$. Or si $\varphi \in \bar{S}$, $\varphi \geqq T\varphi \geqq u_0$, donc $\bar{S}$ est minoré par u_0. Et si φ et ψ sont dans $\bar{S}$, $\operatorname{Inf}(\varphi, \psi)$ (défini puisque Φ est un treillis) est dans $\bar{S}$; en effet

$$T(\operatorname{Inf}(\varphi, \psi)) \leqq T\varphi \leqq \varphi \quad (T \text{ est croissante}),$$

et de même

$$T(\operatorname{Inf}(\varphi, \psi)) \leqq \psi, \quad \text{par suite:}$$

$$T(\operatorname{Inf}(\varphi, \psi)) \leqq \operatorname{Inf}(\varphi, \psi).$$

Donc $\underline{u}$ est bien défini ($\underline{u} \in \Phi$).

Montrons que $\underline{u}$ est sur-solution. Si φ est dans $\bar{S}$, nous avons $\varphi \geqq \underline{u}$, donc $\varphi \geqq T\varphi \geqq T\underline{u}$ puisque T est croissante, et par passage à l'Inf sur φ dans $\bar{S}$: $\underline{u} \geqq T\underline{u}$, c'est-à-dire que $\underline{u}$ est sur-solution.

† Pour φ et ψ dans Φ, $\operatorname{Sup}(\varphi, \psi)$ et $\operatorname{Inf}(\varphi, \psi)$ sont définis dans Φ.

La croissance de T entraine alors que $T\underline{u}$ est aussi sur-solution. Mais alors $\underline{u}$ est solution car on a $\underline{u} \leqq T\underline{u}$ (puisque $T\underline{u} \in \bar{S}$) et $\underline{u} \geqq T\underline{u}$, donc $\underline{u} = T\underline{u}$.

Il reste à montrer que $\underline{u}$ est la solution minimale. Or il est clair que si u est solution, u est sur-solution, donc $\underline{u} \leqq u$.

Et l'on montre de même l'existence d'une solution maximale

$$\bar{u} = \operatorname*{Sup}_{\varphi \in \underset{\sim}{S}} \varphi,$$

où $\underline{S}$ est le sous-ensemble de Φ formé des sous-solutions. ■

Notons pour conclure ce Chapitre I que la démonstration d'existence du Théorème 1 repose sur des arguments *de continuité, de compacité et de convexité*, que la démonstration d'existence d'une solution minimale et d'une solution maximale dans la remarque précédente repose sur des arguments de monotonie, et que la démonstration constructive du Théorème 2 repose sur des arguments de *monotonie, de continuité et de compacité.*

Chapitre II. Applications

Dans ce chapître, nous donnons plusieurs exemples d'applications des théorèmes développés au chapître précédent.

La première application traitée a motivé ce travail; c'est un problème issu de la physique des plasmas. Posé comme une *équation*, il comporte cependant un opérateur non linéaire $\bar{\beta}$ *qui n'est ni monotone ni local*

$$\bar{\beta}(u)(x) = \operatorname{mes}\{y \mid u(y) \leqq u(x)\},$$

et qui n'est pas continu.

On est amené à poser un problème plus général faisant intervenir un opérateur multivoque $\beta(.)$, et, sur un espace produit, un autre opérateur $\beta(.,.)$ "monotone" en un sens défini plus loin.

Cette formulation est en fait une I.Q.V. qui rentre dans le cadre du Chapître I. Nous avons déjà exploité cet exemple pour lui-même dans [28] et [30] mais il s'inscrit ici dans un contexte plus général.

Nous donnons ensuite deux autres applications. La première est une *vraie inéquation quasi-variationnelle* "non standard" comportant le même terme $\bar{\beta}$ et se resolvant par les mêmes méthodes. La seconde généralise $\beta(.)$ et fait apparaître toute une classe d'opérateurs multivoques non monotones, non locaux, et, de façon sous jacente, sur un espace produit, des opérateurs multivoques "monotones" non locaux, ce qui est intéressant car la plupart des opérateurs monotones traités habituellement sont locaux (à rapprocher des Lemmes 4 et 8 ci-dessous et des remarques qui les suivent).

1. *Application en physique des plasmas*

1.1. *Préliminaires.* Soit Ω un ouvert borné "regulier" de $\mathbf{R}^N$ dont on notera $|\Omega|$ la mesure. Si v et φ sont deux fonctions mesurables réelles définies presque partout sur Ω, on pose:

$$\underline{\beta}(v,\varphi)(x)=\mathrm{mes}\{y\mid\varphi(y)<v(x)\},$$

$$\bar{\beta}(v,\varphi)(x)=\mathrm{mes}\{y\mid\varphi(y)\leqq v(x)\},$$

et l'on note:

$$\underline{\beta}(v)=\underline{\beta}(v,v)\quad\text{et}\quad\bar{\beta}(v)=\bar{\beta}(v,v).$$

On remarque que $\underline{\beta}(v,\varphi)$, $\bar{\beta}(v,\varphi)$ (et bien sûr $\underline{\beta}(v)$ et $\bar{\beta}(v)$) sont définis presque partout dans Ω, plus précisement aux points de Ω où $v(x)$ est défini. En effet, en un tel point x, on peut écrire:

$$\underline{\beta}(v,\varphi)(x)=\int_\Omega \underline{h}(v(x)-\varphi(y))dy,$$

$$\bar{\beta}(v,\varphi)(x)=\int_\Omega \bar{h}(v(x)-\varphi(y))dy,$$

ou

$$\underline{h}(t)=\begin{Bmatrix}0 \text{ si } t\leqq 0,\\ 1 \text{ sinon,}\end{Bmatrix}\quad\text{et}\quad\bar{h}(t)=\begin{Bmatrix}0 \text{ si } t<0,\\ 1 \text{ sinon}\end{Bmatrix}.$$

Il suffit donc de vérifier que $\underline{h}(v(x)-\varphi(.))$ et $\bar{h}(v(x)-\varphi(.))$ sont mesurables sur Ω (elles seront alors integrales puisque bornées par 1 en module). Or ceci est vrai puisque $\underline{h}$ et $\bar{h}$ sont boréliennes, que φ est mesurable, et que la composée d'une application borélienne par une application mesurable est mesurable.

On montre alors le résultat suivant:

LEMME 1. *Si v et φ sont mesurables, $\underline{\beta}(v,\varphi)$ et $\bar{\beta}(v,\varphi)$ (donc aussi $\underline{\beta}(v)$ et $\bar{\beta}(v)$) sont mesurables.*

DÉMONSTRATION. Puisque v est mesurable, il existe une suite de compacts K_n contenus dans Ω tels que $\mathrm{mes}(\Omega-K_n)\leqq 1/n$ et $v|_{K_n}$ est continue.

Soient $\underline{\beta}_n$ et $\bar{\beta}_n$ les fonctions réelles données par:

$$\underline{\beta}_n=\underline{\beta}(v,\varphi)|_{K_n},$$

$$\bar{\beta}_n=\bar{\beta}(v,\varphi)|_{K_n}.$$

On vérifie comme ci-dessus que $\underline{\beta}_n$ et $\bar{\beta}_n$ sont définies partout sur K_n. Nous allons montrer qu'elles sont mesurables sur K_n. Il suffit pour cela d'établir que $\underline{\beta}_n$(resp^t $\bar{\beta}_n$) est s.c.i. (resp^t s.c.s.) sur K_n. Or si x_m est une suite qui tend vers x dans K_n,

$$\begin{aligned}\underline{\lim}\, \underline{\beta}_n(x_m) &= \underline{\lim} \int_\Omega \underline{h}(v(x_m) - \varphi(y))dy \\ &\geqq \int_\Omega \underline{\lim}\, \underline{h}(v(x_m) - \varphi(y))dy \\ &\geqq \int_\Omega \underline{h}(v(x) - \varphi(y))dy \quad (= \underline{\beta}_n(x))\end{aligned}$$

puisque v est continue sur K_n et $\underline{h}$ est s.c.i., et ceci montre que $\underline{\beta}_n$ est s.c.i. sur K_n. La démonstration est semblable pour $\bar{\beta}_n$.

Nous définissons alors par recollement une nouvelle suite de compacts K_n maintenant croissante, vérifiant encore $\mathrm{mes}(\Omega - K_n) \leqq 1/n$, et deux nouvelles suites de fonctions $\underline{\beta}_n$ et $\bar{\beta}_n$ mesurables sur K_n.

Soient alors $\underline{\underline{\beta}}_n$ et $\bar{\bar{\beta}}_n$ les fonctions réelles définies partout dans Ω par:

$$\underline{\underline{\beta}}_n(x) = \begin{cases} \underline{\beta}_n(x) = \underline{\beta}(v, \varphi)(x) & \text{si} \quad x \in K_n, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

$$(\text{resp}^t\, \bar{\bar{\beta}}_n(x) = \begin{cases} \bar{\beta}_n(x) = \bar{\beta}(v, \varphi)(x) & \text{si} \quad x \in K_n, \\ 0 \text{ sinon).} \end{cases}$$

Il est clair que $\underline{\underline{\beta}}_n$ et $\bar{\bar{\beta}}_n$ sont mesurables.

Nous allons montrer maintenant que $\underline{\beta}(v, \varphi)$ et $\bar{\beta}(v, \varphi)$ sont limites de $\underline{\underline{\beta}}_n$ et $\bar{\bar{\beta}}_n$ au sens de la convergence presque partout. Soit x dans $\bigcup_n K_n$. Comme les K_n sont emboités croissants, x est dans K_n pour tous les n "assez grands". On a alors

$$\underline{\underline{\beta}}_n(x) = \underline{\beta}(v, \varphi)(x) \quad \text{et} \quad \bar{\bar{\beta}}_n(x) = \bar{\beta}(v, \varphi)(x).$$

Maintenant le complémentaire dans Ω de $\bigcup_n K_n$ est $\bigcap_n (\Omega - K_n)$. Il est donc négligeable. Et comme $\underline{\beta}(v, \varphi)$ et $\bar{\beta}(v, \varphi)$ sont limites presque partout de fonctions mesurables, elles sont mesurables et le lemme est démontré. ■

Il est alors clair que $\underline{\beta}(v, \varphi)$ et $\bar{\beta}(v, \varphi)$ (et donc $\underline{\beta}(v)$ et $\bar{\beta}(v)$) sont dans $L^\infty(\Omega)$ et vérifient

$$0 \leqq \underline{\beta}(v, \varphi)(x) \leqq \bar{\beta}(v, \varphi)(x) \leqq |\Omega|, \quad \text{p.p.} \quad x \in \Omega,$$

$$0 \leqq \underline{\beta}(v)(x) \leqq \bar{\beta}(v)(x) \leqq |\Omega|, \quad \text{p.p.} \quad x \in \Omega.$$

On note maintenant $\beta(v, \varphi)(.)$ (resp' $\beta(v)(.)$) la fonction réelle multivoque ($\Omega \to 2^{\mathbf{R}}$) définie presque partout dans Ω (plus précisément là où v est définie) par:

$$\beta(v, \varphi)(x) = [\underline{\beta}(v, \varphi)(x), \bar{\beta}(v, \varphi)(x)]$$

$$(\text{resp}'\, \beta(v)(x) = [\underline{\beta}(v)(x), \bar{\beta}(v)(x)]).$$

Alors $\psi \in \beta(v, \varphi)$ (resp' $\psi \in \beta(v)$) désignera une fonction mesurable donc dans $L^\infty(\Omega)$ telle que

$$\psi(x) \in \beta(v, \varphi)(x), \quad \text{p.p.} \quad x \in \Omega$$

$$(\text{resp}'\, \psi(x) \in \beta(v)(x), \quad \text{p.p.} \quad x \in \Omega),$$

c'est-à-dire que

$$\beta(v, \varphi) = \{\psi \in L^\infty(\Omega) \mid \underline{\beta}(v, \varphi)(x) \leqq \psi(x) \leqq \bar{\beta}(v, \varphi)(x), \quad \text{p.p.} \quad x \in \Omega\}$$

$$(\text{resp}'\, \beta(v) = \{\psi \in L^\infty(\Omega) \mid \underline{\beta}(v)(x) \leqq \psi(x) \leqq \bar{\beta}(v)(x), \quad \text{p.p.} \quad x \in \Omega\}).$$

On définit ainsi un opérateur multivoque $\beta(.,.)$ (resp' $\beta(.)$) sur le produit $\mathcal{M}(\Omega)^2$ (resp' $\mathcal{M}(\Omega)$) à valeurs dans $L^\infty(\Omega)$, où $\mathcal{M}(\Omega)$ désigne l'ensemble des fonctions mesurables sur Ω.

On remarque que l'opérateur $\beta(.,.)$ est *local par rapport à v*, et *non local par rapport à φ*. Ainsi l'opérateur $\beta(.)$ n'est pas local. De plus il est clair que $\beta(.)$ n'est *pas monotone*. Nous allons montrer cependant que $\beta(.,.)$ possède une propriété de monotonie intéressante (cf. Lemme 4 plus loin).

1.2. *Le problème fort et le problème faible.* Ces préliminaires étant établis, nous pouvons maintenant formuler correctement le problème aux limites: pour f donné dans $L^2(\Omega)$ on recherche u dans $H_0^1(\Omega)$ solution du *problème fort*:

$$\begin{cases} -\Delta u + \bar{\beta}(u) = f & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \tag{1}$$

ou du *problème faible*:

$$\begin{cases} -\Delta u + \beta(u) \ni f, \\ u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{cases} \tag{2}$$

On notera, d'après Agmon–Douglis–Nirenberg [1], qu'une telle solution est nécessairement dans $H^2(\Omega)$. De même, si f est donné dans $L^p(\Omega)$, alors u est dans $W^{2,p}(\Omega)$, pour tout $p \geqq 2$.

Cette appellation de "problème fort" et "problème faible" se justifie, comme l'indique la proposition suivante, de démonstration immédiate.

PROPOSITION 1. *Toute solution dans* $H_0^1(\Omega)$ *de* (1) *est une solution de* (2), *et réciproquement si* u *dans* $H_0^1(\Omega)$ *est une solution de* (2) *qui vérifie en outre*

$$(3) \qquad \forall t \in \boldsymbol{R}, \ \{y \mid u(y) = t\} \text{ est de mesure nulle,}$$

alors $\beta(u) = \bar{\beta}(u)$ *presque partout et* u *est une solution de* (1).

Dans la suite, si u est une fonction mesurable de Ω dans $\mathbf{R}$, nous dirons que u est "sans palier" si u vérifie (3).

REMARQUE. La Proposition 1 ne signifie pas que les solutions de (1) sont sans palier. On s'en convaincra à la Section 1.4 par l'exemple à une dimension d'espace, avec second membre constant.

Enfin, avec une hypothèse supplémentaire sur f, les problèmes fort et faible sont equivalents:

PROPOSITION 2. *Si* f *vérifie pour presque tout* x *de* Ω

$$(4) \qquad f(x) \notin [0, |\Omega|],$$

alors u *dans* $H_0^1(\Omega)$ *est solution de* (1) *si et seulement si* u *est solution de* (2).

DÉMONSTRATION. Il suffit d'après la Proposition 1 de montrer que (4) implique (3) pour toute solution u dans $H_0^1(\Omega)$ de (2). Supposons donc que (4) soit vérifié, et que u dans $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ soit une solution de (2) qui ne vérifie pas (3). Il existe alors un ensemble E de mesure non nulle où u est presque partout constante. D'après G. Stampacchia ([41] p. 324–326) on aura:

$$\nabla u(x) = 0 \quad \text{p.p.} \quad x \in E,$$

puisque u est dans $H^1(\Omega)$ et p.p. constante sur E. Par réitération

$$\Delta u(x) = 0 \quad \text{p.p.} \quad x \in E,$$

puisque ∇u est dans $H^1(\Omega)^N$ et p.p. constante sur E. Comme u est solution de (2),

$$0 = \Delta u(x) \in f(x) - \beta(u)(x) \in f(x) - [0, |\Omega|] \quad \text{p.p.} \quad x \in E,$$

en contradiction avec (4).

Nous allons maintenant montrer que la formulation faible (2) est en fait une I.Q.V. qui s'inscrit dans le cadre du Chapitre I.

THÉORÈME 1. *Soit J la fonctionnelle réelle défine sur $H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$ par*:

$$J(v,\varphi)=\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2-\int_\Omega fv+\int\int_{\Omega\times\Omega}(v(x)-\varphi(y))_+dxdy.$$

Alors u dans $H_0^1(\Omega)$ est solution de l'I.Q.V.

$$J(u,u)\leqq J(v,u),\quad \forall v\in H_0^1(\Omega), \tag{5}$$

si et seulement si u est solution du problème faible (2).

DÉMONSTRATION. Elle est immediate à partir du lemme suivant:

LEMME 2. *Soit φ fixé dans $L^2(\Omega)$, et soit $\mathcal{P}_\varphi$ le problème d'optimisation*:

$$\operatorname*{Inf}_{v\in H_0(\Omega)} J(v,\varphi) \tag{6}$$

ce problème admet une solution unique u_φ dans $H_0^1(\Omega)$, caractérisée par

$$\begin{cases} -\Delta u_\varphi+\beta(u_\varphi,\varphi)\ni f,\\ u_\varphi=0\quad sur\ \partial\Omega. \end{cases} \tag{7}$$

DÉMONSTRATION DU LEMME 2. La fonctionnelle réelle $J(.,\varphi)$ étant strictement convexe, continue et coercive, le problème $\mathcal{P}_\varphi$ admet une solution unique u_φ caractérisée par:

$$0\in\partial_v J(u_\varphi,\varphi), \tag{8}$$

où $\partial_v J(v,\varphi)$ désigne le sous-différentiel de J par rapport à v au point (v,φ). Pour ce résultat et le calcul sous-différentiel nous renvoyons le lecteur à Ekeland–Temam [9] (cf. en particulier p. 21 et 34). Il nous faut donc calculer $\partial_v J(v,\varphi)$, et l'on établit pour cela le lemme ci après.

LEMME 3. *Soit $G(v,\varphi)$ la fonctionnelle réelle définie sur $H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$ par*:

$$G(v,\varphi)=\int\int_{\Omega\times\Omega}(v(x)-\varphi(y))_+dxdy.$$

Alors

$$\partial_v G(v,\varphi)=\beta(v,\varphi).$$

DÉMONSTRATION DU LEMME 3. Nous noterons $G(v)$ au lieu de $G(v,\varphi)$ pour simplifier l'écriture. Definissons $g(L^1(\Omega)\to\mathbf{R})$ par

$$g(v)=\int\int_{\Omega\times\Omega}(v(x)-\varphi(y))_+dxdy,$$

et notons Λ l'injection canonique de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^1(\Omega)$. Alors $G=g\circ\Lambda$ et pour v dans $H_0^1(\Omega)$, $\partial G(v)=\Lambda^*\partial g(\Lambda v)$ (cf. Ekeland–Temam [9] p. 27), Λ^* étant l'injection canonique de $L^\infty(\Omega)$ dans $H^{-1}(\Omega)$; c'est-à-dire que $\partial G(v)$ est en fait $\partial g(v)$. Il reste donc à calculer $\partial g(v)$. Puisque g est finie et continue partout, une définition commode est la suivante (cf. J. J. Moreau [26] p. 65):

$$\partial g(v)=\left\{\psi\in L^\infty(\Omega)\,\Big|\,\lim_{\lambda\searrow 0}\frac{g(v+\lambda w)-g(v)}{\lambda}\geqq\langle\psi,w\rangle,\quad\forall\, w\in L^1(\Omega)\right\}.$$

Or

$$\frac{g(v+\lambda w)-g(v)}{\lambda}=\int\int_{\Omega\times\Omega}\frac{(v(x)-\varphi(y)+\lambda w(x))_+-(v(x)-\varphi(y))_+}{\lambda}dxdy.$$

Maintenant, pour presque tous x et y dans Ω,

$$\frac{(v(x)-\varphi(y)+\lambda w(x))_+-(v(x)-\varphi(y))_+}{\lambda}\to\chi(x,y),$$

où

$$\chi(x,y)=\begin{cases}0 & \text{si}\quad \varphi(y)>v(x),\\ w_+(x) & \text{si}\quad \varphi(y)=v(x),\\ w(x) & \text{si}\quad \varphi(y)<v(x),\end{cases}$$

tandis que

$$\left|\frac{(v(x)-\varphi(y)+\lambda w(x))_+-(v(x)-\varphi(y))_+}{\lambda}\right|\leqq|w(x)|$$

(car la fonction $(\,.\,)_+$ est lipschitzienne de constante 1), w fonction intégrable sur $\Omega\times\Omega$, independante de λ. Il suit par le théorème de Lebesgue, que

$$\frac{g(v+\lambda w)-g(v)}{\lambda}\to\int\int_{\Omega\times\Omega}\chi(x,y)dxdy.$$

Or

$$\int\int_{\Omega\times\Omega}\chi(x,y)dxdy$$
$$=\int_\Omega[w_+(x)\operatorname{mes}\{y\mid\varphi(y)=v(x)\}+w(x)\operatorname{mes}\{y\mid\varphi(y)<v(x)\}]dx.$$

Donc $\partial g(v)$ est l'ensemble des ψ dans $L^\infty(\Omega)$ tels que

$$\int_\Omega [w_+(x)\operatorname{mes}\{y \mid \varphi(y) = v(x)\} + w(x)\operatorname{mes}\{y \mid \varphi(y) < v(x)\}]dx$$
$$\geqq \int_\Omega \psi(x)w(x)dx$$

pour tout w dans $L^1(\Omega)$, soit encore

$$\partial g(v) = \{\psi \in L^\infty(\Omega) \mid \underline{\beta}(v, \varphi)(x) \leqq \varphi(x) \leqq \bar{\beta}(v, \varphi)(x), \quad \text{p.p.} \quad x \in \Omega\}.$$

Il suit que $\partial_v G(v, \varphi) = \partial g(v) = \beta(v, \varphi)$. ■

Nous reprenons maintenant la démonstration du Lemme 2. Nous avons vu que u_φ est l'unique solution de $\mathcal{P}_\varphi$ si et seulement si

$$0 \in \partial_v J(u_\varphi, \varphi). \tag{8}$$

Or

$$\begin{aligned} \partial_v J(v, \varphi) &= -\Delta v - f + \partial_v G(v, \varphi) \\ &= -\Delta v - f + \beta(v, \varphi), \end{aligned}$$

d'après le Lemme 3, donc (8) s'écrit encore:

$$\begin{cases} -\Delta u_\varphi + \beta(u_\varphi, \varphi) \ni f, \\ u_\varphi = 0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega, \end{cases} \tag{7}$$

ce qui achève la démonstration du Lemme 2, et du Théorème 1.

Nous allons maintenant nous attacher à résoudre le problème faible (2), c'est-à-dire l'I.Q.V. (5), en appliquant les résultats du Chapitre I.

1.3. *Résolution du problème faible.* Il suffit de vérifier les hypothèses (i) à (v) du Chapitre I. On pose $V = H_0^1(\Omega)$, $\Phi = L^2(\Omega)$; l'injection $V \hookrightarrow \Phi$ est compacte. La fonctionnelle J est définie comme au Théorème 1 par:

$$J(v, \varphi) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 - \int_\Omega fv + \int\int_{\Omega\times\Omega} (v(x) - \varphi(y))_+ dxdy.$$

Verification de l'hypothèse (i)

Soit v_n une suite de $H_0^1(\Omega)$, et φ_n une suite de $L^2(\Omega)$ telles que

$$v_n \to v \quad \text{dans } H_0^1(\Omega) \text{ faible},$$
$$\varphi_n \to \varphi \quad \text{dans } L^2(\Omega) \text{ fort}.$$

Alors

$$\underline{\lim} J(v_n, \varphi_n) \geqq \underline{\lim} \left[\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v_n|^2 - \int_\Omega f v_n\right]$$

$$+ \lim \left[\iint_{\Omega\times\Omega} (v_n(x) - \varphi_n(y))_+ dxdy\right],$$

et $\iint_{\Omega\times\Omega}(v_n(x) - \varphi_n(y))_+dxdy$ tend vers $\iint_{\Omega\times\Omega}(v(x) - \varphi(y))_+dxdy$ (on utilise le fait que $(.)_+$ est lipschitzienne et les convergences de v_n et φ_n dans $L^2(\Omega)$ fort). Grâce à la semi-continuité inférieure faible de la fonction $\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla .|^2 - \int_\Omega f.$, on obtient

$$\underline{\lim} J(v_n, \varphi_n) \geqq J(v, \varphi),$$

et J est donc s.c.i. sur $H_0^1(\Omega)$ faible $\times L^2(\Omega)$ fort.

Vérification de l'hypothèse (ii)–(ii)'

Il est immédiat que, pour tout φ de $L^2(\Omega)$, $J(.,\varphi)$ est une fonctionnelle réelle, strictement convexe. Vérifions l'hypothèse d'uniforme coercivité:

$$J(v, \varphi) - J(0, \varphi) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 - \int_\Omega fv + \iint_{\Omega\times\Omega} (v(x) - \varphi(y))_+ dxdy$$

$$- \iint_{\Omega\times\Omega} (-\varphi(y))_+ dxdy.$$

Or

$$\left|\iint_{\Omega\times\Omega} (v(x) - \varphi(y))_+ dxdy - \iint_{\Omega\times\Omega} (-\varphi(y))_+ dxdy\right| \leqq \iint_{\Omega\times\Omega} |v(x)| dxdy$$

(puisque $(.)_+$ est lipschitzienne de constante 1)

$$= |\Omega| \int_\Omega |v(x)| dx$$

$$\leqq C \|v\|_{H_0^1(\Omega)}$$

(où C est une constante indépendante de φ).

Finalement

$$J(v, \varphi) - J(0, \varphi) \geqq \tfrac{1}{2}\|v\|^2_{H_0^1(\Omega)} - [\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} + C]\|v\|_{H_0^1(\Omega)},$$

où le membre de droite ne dépend pas de φ et tend vers $+\infty$ lorsque $\|v\|_{H_0^1(\Omega)}$ tend vers $+\infty$.

Vérification de l'hypothèse (iii)

Elle est immédiate.

D'ores et déjà, avec le résultat de régularité signalé à la Section 1.2, le Théorème 1 du Chapitre I nous donne par transcription le:

THÉORÈME 1'. *Le problème d'I.Q.V.* (5) (*c'est-à-dire le problème faible* (2)) *admet au moins une solution u dans* $H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$.

REMARQUE. L'application T définie au Chapître I, et que l'on sait continue (cf. Lemme 1, Chapitre I) est même hölderienne d'ordre $1/2$ dans cet exemple. En effet, puisqu'il s'agit de l'application qui à φ dans $L^2(\Omega)$ associe la solution u_φ du problème $\mathcal{P}_\varphi$ défini en (6), nous avons (cf. Lions [17] p. 10):

$$\int_\Omega (-\Delta u_\varphi)(v-u_\varphi)+\int\int_{\Omega\times\Omega}[(v(x)-\varphi(y))_+-(u_\varphi(x)-\varphi(y))_+]dxdy \geqq 0,$$

pour tout v de $H_0^1(\Omega)$, et de même pour $u_{\varphi'}$. On fait $v=u_{\varphi'}$ dans la première inéquation, $v=u_\varphi$ dans la seconde, et l'on ajoute. Il vient:

$$\int_\Omega -\Delta(u_\varphi-u_{\varphi'})(u_{\varphi'}-u_\varphi)+\int\int_{\Omega\times\Omega}[(u_{\varphi'}(x)-\varphi(y))_+-(u_{\varphi'}(x)-\varphi'(y))_+]dxdy$$
$$+\int\int_{\Omega\times\Omega}[(u_\varphi(x)-\varphi'(y))_+-(u_\varphi(x)-\varphi(y))_+]dxdy \geqq 0,$$

soit, en utilisant encore le fait que $(\,.\,)_+$ est lipschitzienne de constante 1,

$$\begin{aligned}\|u_{\varphi'}-u_\varphi\|^2_{H_0^1(\Omega)} &\leqq 2\int\int_{\Omega\times\Omega}|\varphi(y)-\varphi'(y)|dxdy\\ &=2|\Omega|\int_\Omega|\varphi(y)-\varphi'(y)|dy\\ &\leqq C\|\varphi-\varphi'\|_{L^2(\Omega)},\end{aligned}$$

et finalement

$$\|u_{\varphi'}-u_\varphi\|_{L^2(\Omega)}\leqq C\|u_{\varphi'}-u_\varphi\|_{H_0^1(\Omega)}\leqq C\|\varphi-\varphi'\|^{1/2}_{L^2(\Omega)},$$

C désignant des constantes diverses.

Pour la vérification des hypothèses (iv) et (v) l'espace de Hilbert $\Phi=L^2(\Omega)$ est ordonné par la relation d'ordre associée au cône fermé P des éléments de $L^2(\Omega)$ positifs presque partout dans Ω. On constate aisément que P est normal (avec $\delta=1$). On rappelle que T est l'application de $L^2(\Omega)$ dans lui même qui à φ associe la solution u_φ de (7) (Lemme 2).

La vérification des hypothèses (iv) et (v) repose sur le principe du maximum.

Vérification de l'hypothèse (iv)

Elle utilise une propriété de monotonie de l'opérateur $\beta(.,.)$ défini sur l'espace produit $V \times \Phi$.

LEMME 4. *L'opérateur multivoque $\beta(.,.)$ possède la propriété de monotonie ci-après:*

Pour tous v et v' dans $H_0^1(\Omega)$, pour tous φ et φ' dans $L^2(\Omega)$, l'inégalité

$$\varphi \leqq \varphi' \quad \textit{p.p. dans } \Omega$$

implique

$$\int_\Omega (\psi - \psi')(v - v')_+ dx \geqq 0, \quad \forall \psi \in \beta(v, \varphi), \quad \forall \psi' \in \beta(v', \varphi').$$

REMARQUE. En particulier si $\varphi = \varphi'$, l'opérateur $\beta(., \varphi)$ est *T-monotone* au sens de Brezis–Stampacchia [6] et $\beta(.,.)$ est *non local*, alors que la plupart des opérateurs monotones traités habituellement sont locaux.

DÉMONSTRATION DU LEMME 4. Soient v et v' dans $H_0^1(\Omega)$, φ et φ' dans $L^2(\Omega)$ tels que $\varphi \leqq \varphi'$ p.p. dans Ω. Dans l'intégrale qui nous intéresse, seuls interviennent les points x où $v(x) > v'(x)$. Alors,

$$\varphi'(y) \leqq v'(x) \quad \text{implique} \quad \varphi(y) < v(x)$$

$$(\text{car } \varphi(y) \leqq \varphi'(y) \leqq v'(x) < v(x)).$$

Donc

$$\bar{\beta}(v', \varphi')(x) \leqq \underline{\beta}(v, \varphi)(x),$$

et le résultat annoncé en découle.

On vérifie alors la croissance de l'application T. D'après (7)

$$-\Delta u_\varphi + \psi = f \quad \text{dans } \Omega, \text{ avec } \psi \text{ dans } \beta(u_\varphi, \varphi).$$

De même

$$-\Delta u_{\varphi'} + \psi' = f \text{ dans } \Omega, \text{ avec } \psi' \text{ dans } \beta(u_{\varphi'}, \varphi').$$

On retranche membre à membre et on multiplie scalairement par $(u_\varphi - u_{\varphi'})_+$ (qui est dans $H_0^1(\Omega)$ d'après Stampacchia [41]). Il vient:

$$\int_\Omega -\Delta(u_\varphi - u_{\varphi'})(u_\varphi - u_{\varphi'})_+ dx + \int_\Omega (\psi - \psi')(u_\varphi - u_{\varphi'})_+ dx = 0.$$

La seconde intégrale est positive d'après le Lemme 4 si $\varphi \leqq \varphi'$ presque partout.

Alors

$$\|(u_\varphi - u_{\varphi'})_+\|^2_{H^1_0(\Omega)} = \int_\Omega - \Delta(u_\varphi - u_{\varphi'})(u_\varphi - u_{\varphi'})_+ dx \leqq 0,$$

et par conséquent on a $u_\varphi \leqq u_{\varphi'}$ presque partout, ce qui démontre la croissance de l'application T.

Vérification de l'hypothèse (v)

Soient u_0 et u^0, dans $H^1_0(\Omega)$, les solutions respectives de

$$\left\{\begin{array}{l} -\Delta u_0 = f - |\Omega| \quad \text{dans } \Omega \\ u_0 = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{array}\right. \tag{9}$$

et

$$\left\{\begin{array}{l} -\Delta u^0 = f \quad \text{dans } \Omega, \\ u^0 = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega. \end{array}\right. \tag{10}$$

Soit φ quelconque dans $L^2(\Omega)$. D'après le Lemme 2, $u_\varphi = T\varphi$ vérifie

$$\left\{\begin{array}{l} -\Delta u_\varphi + \psi = f \quad \text{dans } \Omega, \\ u_\varphi = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{array}\right.$$

avec ψ dans $\beta(u_\varphi, \varphi)$, et l'on a alors

$$0 \leqq \underline{\beta}(u_\varphi, \varphi)(x) \leqq \psi(x) \leqq \bar{\beta}(u_\varphi, \varphi)(x) \leqq |\Omega|, \quad \text{p.p. } x \in \Omega.$$

Le principe du maximum entraine par suite:

$$u_0 \leqq u_\varphi = T\varphi \leqq u^0 \quad \text{p.p. dans } \Omega.$$

Le Théorème 2 du Chapitre I donne alors l'existence d'une solution minimale $\underline{u}$ et d'une solution maximale $\bar{u}$ pour le problème faible (2). Elles sont obtenues comme limites dans $L^2(\Omega)$ des suites u_n et u^n définies au Chapitre I (Lemmes 2 et 4).

Dans le cas présent, les convergences $u_n \nearrow \underline{u}$ et $u^n \searrow \bar{u}$ ont lieu dans $H^1_0(\Omega)$ fort. Montrons le par exemple pour la suite u_n. D'après (7) et le fait que $\beta(v, \varphi)$ est borné dans $L^\infty(\Omega)$ indépendamment de (v, φ), la suite u_n est bornée dans $H^2(\Omega)$, et l'on peut extraire une sous suite, notée encore u_n, telle que

$$u_n \to \underline{u} \quad \text{dans} \quad H^1_0(\Omega) \text{ fort}$$

(grâce à l'injection compacte de $H^2(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$). Comme $\underline{u}$ est défini de façon unique ($\underline{u}$ est la solution minimale) c'est en fait toute la suite u_n qui converge vers $\underline{u}$ dans $H_0^1(\Omega)$ fort. Il en est de même pour la suite u^n, et l'on obtient le théorème d'existence plus précis ci-après:

THÉORÈME 2'. *Le problème faible* (2) *admet une solution minimale $\underline{u}$ et une solution maximale $\bar{u}$ dans $H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$ obtenues comme limites* (*dans $H_0^1(\Omega)$ fort*) *des suites u_n et u^n définies par*:

$$(7)_n \qquad \begin{cases} -\Delta u_{n+1}+\beta(u_{n+1},u_n)\ni f, \\ u_{n+1}=0 \quad sur\ \partial\Omega, \end{cases}$$

et

$$(7)^n \qquad \begin{cases} -\Delta u^{n+1}+\beta(u^{n+1},u^n)\ni f, \\ u^{n+1}=0 \quad sur\ \partial\Omega, \end{cases}$$

u_0 et u^0 étant les solutions respectives de (9) *et* (10).

1.4. *Exemple à une dimension d'espace.* Pour la résolution explicite détaillée de l'exemple à une dimension d'espace ($\Omega =]-1,+1[$) avec second membre constant (f = constante) nous renvoyons le lecteur à l'appendice de [29]. Nous indiquons seulement ici les résultats obtenus.

Si $f<0$ ou $f>|\Omega|$, le problème—fort ou faible puisqu'ils sont équivalents d'après la Proposition 2—admet une solution unique, dans $C^2(\bar{\Omega})$, sans palier. Par contre, si $0\leqq f<|\Omega|$, le problème faible (2) admet une infinité de solutions (en particulier $\underline{u}\neq\bar{u}$), ayant toutes un palier sauf $\underline{u}$ si $f=0$; la solution minimale $\underline{u}$ est l'unique solution du problème fort (1). Et si $f=|\Omega|$, toutes les solutions du problème faible sont solutions du problème fort; $\underline{u}\equiv 0$ et $\bar{u}$ sont les seules solutions dans $C^2(\bar{\Omega})$; $\bar{u}$ est la seule solution sans palier.

Il est très intéressant de remarquer que les solutions maximum et minimum sont plus régulières que les solutions intermédiaires.

2. *Une inéquation quasi-variationnelle "non standard"*

Certains résultats du Chapître I peuvent s'appliquer à beaucoup de problèmes plus généraux que celui étudié au paragraphe précédent. Il est possible par exemple de remplacer dans (2) $-\Delta$ par un opérateur A non linéaire, monotone, qui vérifie le principe du maximum, et considérer d'autres conditions aux limites. On peut aussi introduire des contraintes d'inégalité et sortir du cadre "Φ hilbertien".

En donnant directement la formulation "faible", on résout alors par exemple:

$$(11)\qquad \begin{cases} Au+\beta(u)\ni f, \\ u \geqq Mu \quad \text{sur } \partial\Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu_A} \geqq g \quad \text{sur } \partial\Omega, \\ (u-Mu)\left(\dfrac{\partial u}{\partial \nu_A}-g\right)=0, \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

avec Ω ouvert borné "régulier" de $\mathbf{R}^N$,

$$Au = -\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)+|u|^{p-2}u \quad (p>N),$$

f dans $L^2(\Omega)$, g dans $L^2(\partial\Omega)$, β défini comme la Section 1.1.

On suppose que M est un opérateur continu de $C^0(\bar{\Omega})$ dans $L^2(\partial\Omega)$ qui vérifie les hypothèses H_1 et H_2 ci-après:

H_1) M est croissant au sens: $M\varphi \leqq M\varphi'$ presque partout sur $\partial\Omega$ dès que $\varphi \leqq \varphi'$ partout dans $\bar{\Omega}$.

H_2) Il existe m_0 dans $L^2(\partial\Omega)$ tel que, pour tout φ de $C^0(\bar{\Omega})$,

$$m_0 \leqq M\varphi, \quad \text{p.p. sur } \partial\Omega.$$

■

Là encore nous allons montrer que (11) est en fait une I.Q.V.

THÉORÈME 2. *Soit J la fonctionnelle à valeurs dans* $]-\infty,+\infty]$ *définie sur* $W^{1,p}(\Omega)\times C^0(\bar{\Omega})$ *par*:

$$J(v,\varphi)=\frac{1}{p}\int_\Omega\left[|v|^p+\sum_i\left|\frac{\partial v}{\partial x_i}\right|^p\right]-\int_\Omega fv$$

$$+\int\int_{\Omega\times\Omega}(v(x)-\varphi(y))_+dxdy-\int_{\partial\Omega}gv+\chi_{K(\varphi)}(v),$$

où $\chi_{K(\varphi)}$ est la fonction indicatrice[†] *de*

$$K(\varphi)=\{v\in W^{1,p}(\Omega)\,|\,v\geqq M\varphi, \quad \text{p.p. sur } \partial\Omega\}.$$

Alors u dans $W^{1,p}(\Omega)$ est solution de l'I.Q.V.

$$(12)\qquad J(u,u)\leqq J(v,u), \quad \forall v\in W^{1,p}(\Omega),$$

si et seulement si u est solution de (11).

[†] c'est-à-dire

$$\chi_{K(\varphi)}(v)=\begin{cases}0 & \text{si} \quad v\in K(\varphi), \\ +\infty & \text{sinon.}\end{cases}$$

DÉMONSTRATION. Nous travaillons comme au paragraphe précédent et nous montrons d'abord le:

LEMME 5. *Soit φ fixé dans $C^0(\bar{\Omega})$, et soit $\mathcal{P}_\varphi$ le problème d'optimisation*

$$\inf_{v \in W^{1,p}(\Omega)} J(v, \varphi). \tag{13}$$

Alors u_φ dans $W^{1,p}(\Omega)$ est l'unique solution de $\mathcal{P}_\varphi$ si et seulement si il vérifie:

$$\begin{cases} Au_\varphi + \beta(u_\varphi, \varphi) \ni f, \\ u_\varphi \geqq M\varphi \quad sur\ \partial\Omega, \\ \dfrac{\partial u_\varphi}{\partial \nu_A} \geqq g \quad sur\ \partial\Omega, \\ (u_\varphi - M\varphi)\left(\dfrac{\partial u_\varphi}{\partial \nu_A} - g\right) = 0 \quad sur\ \partial\Omega. \end{cases} \tag{14}$$

DÉMONSTRATION DU LEMME 5. On vérifie d'abord que $K(\varphi)$ est un convexe fermé de $W^{1,p}(\Omega)$. Il est évidemment convexe. Montrons qu'il est fermé. Soit v_n une suite de $K(\varphi)$ qui converge vers v dans $W^{1,p}(\Omega)$; alors $v_n|_{\partial\Omega}$ converge vers $v|_{\partial\Omega}$ dans $L^2(\partial\Omega)$, et l'on peut extraire une sous-suite, notée encore v_n telle que $v_n|_{\partial\Omega}$ converge vers $v|_{\partial\Omega}$ presque partout. Le passage à la limite dans $v_n|_{\partial\Omega} \geqq M\varphi$ presque partout donne alors $v|_{\partial\Omega} \geqq M\varphi$ presque partout, donc v est dans $K(\varphi)$.

La fonctionnelle $J(.\,, \varphi)$ est convexe, s.c.i., propre, strictement convexe sur son domaine effectif, et coercive. Définissons j par

$$j(v, \varphi) = J(v, \varphi) - \chi_{K(\varphi)}(v).$$

D'après Ekeland–Temam ([9] p. 21, 26 et 34) le problème d'optimisation (13) admet une solution unique u_φ caractérisée par l'existence d'un élément v_φ^* dans $\partial_v j(u_\varphi, \varphi)$ qui vérifie

$$\langle v_\varphi^*, v - u_\varphi \rangle \geqq 0, \quad \forall v \in K(\varphi), \text{ avec } u_\varphi \in K(\varphi).$$

Compte-tenu de l'expression de $\partial_v j(v, \varphi)$, cela équivaut à l'existence d'un élément ψ dans $\beta(u_\varphi, \varphi)$ qui vérifie

$$\int_\Omega (Au_\varphi + \psi - f)(v - u_\varphi) + \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \nu_A} - g\right)(v - u_\varphi) \geqq 0,$$

$$\forall v \in K(\varphi), \text{ avec } u_\varphi \in K(\varphi)$$

(les calculs sont analogues à ceux qui ont été fait aux lemmes 2 et 3) et comme dans [17] p. 27, 28, cette inéquation équivaut à:

$$\begin{cases} Au_\varphi + \psi = f \quad \text{dans } \Omega, \\ u_\varphi \geqq M\varphi \quad \text{sur } \partial\Omega, \\ \dfrac{\partial u_\varphi}{\partial \nu_A} \geqq g \quad \text{sur } \partial\Omega, \\ (u_\varphi - M\varphi)\left(\dfrac{\partial u_\varphi}{\partial \nu_A} - g\right) = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

ce qui s'écrit encore sous la forme (14).

Maintenant comme $W^{1,p}(\Omega)$ est inclus dans $C^0(\bar{\Omega})$ pour $p > N$ (cf. S. L. Sobolev [40]), u dans $W^{1,p}(\Omega)$ vérifie (12) si et seulement si u est solution de $\mathcal{P}_u$ (c'est-à-dire de (14) avec $\varphi = u$). Ceci achève la démonstration du Théorème 2. ■

Nous allons montrer maintenant que la fonctionnelle J définie au Théorème 2 vérifie les hypothèses (i), (ii), (ii'), et (iv) du Chapître I. L'hypothèse (v) est remplacée ici par:

(v)' Il existe une sous-solution u_0 telle que

$$\forall \varphi \in \Phi, \quad u_0 \leqq T\varphi.$$

L'hypothèse (iii) fait défaut. Cependant nous montrerons que si φ_n est une suite qui tend vers φ dans $C^0(\bar{\Omega})$ en croissant, $u_{\varphi_n} = T\varphi_n$ tend vers $u_\varphi = T\varphi$ dans $C^0(\bar{\Omega})$, ce qui permettra encore de résoudre le problème de façon constructive, en atteignant sa solution minimale.

On prend cette fois $V = W^{1,p}(\Omega)$ et $\Phi = C^0(\bar{\Omega})$; l'injection $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\bar{\Omega})$ est compacte d'après S. L. Sobolev ([40] p. 82) pour $p > N$.

Vérification de l'hypothèse (i)

Montrons que J est s.c.i. sur $W^{1,p}(\Omega)$ faible $\times$ $C^0(\bar{\Omega})$. Le seul terme qui pose des problèmes est

$$F(v, \varphi) = \chi_{K(\varphi)}(v).$$

Nous allons montrer que F est s.c.i. sur $W^{1,p}(\Omega)$ faible $\times$ $C^0(\bar{\Omega})$, soit que pour tout a réel,

$$\{(v, \varphi) \mid \chi_{K(\varphi)}(v) \leqq a\}$$

est fermé dans $W^{1,p}(\Omega)$ faible $\times$ $C^0(\bar{\Omega})$. On se limite évidemment à $a \geqq 0$, et alors l'ensemble précédent est

$$\{(v, \varphi) \mid v \in K(\varphi)\}.$$

Soit v_n une suite qui converge vers v dans $W^{1,p}(\Omega)$ faible, et φ_n une suite qui converge vers φ dans $C^0(\bar{\Omega})$ avec v_n dans $K(\varphi_n)$. Alors $v_n|_{\partial\Omega}$ tend vers $v|_{\partial\Omega}$ dans $H^{1/2}(\partial\Omega)$ faible, et, l'injection $H^{1/2}(\partial\Omega)\hookrightarrow L^2(\partial\Omega)$ étant compacte, on peut extraire une sous-suite, notée encore v_n, qui converge vers v presque partout sur $\partial\Omega$.

Comme $M\varphi_n$ converge vers $M\varphi$ dans $L^2(\partial\Omega)$ fort par la continuité de M, on peut encore extraire une sous-suite telle que $M\varphi_n$ converge vers $M\varphi$ presque partout, et le passage à la limite dans $v_n \geqq M\varphi_n$ presque partout donne alors $v \geqq M\varphi$ presque partout, c'est-à-dire que $\{(v,\varphi) | v \in K(\varphi)\}$ est fermé dans $W^{1,p}(\Omega)$ faible $\times C^0(\bar{\Omega})$.

Vérification de l'hypothèse (ii)–(ii)'

Nous avons déjà vu que pour tout φ de $C^0(\bar{\Omega})$, $J(.,\varphi)$ est convexe, s.c.i., propre, strictement convexe sur son domaine effectif. Vérifions l'hypothèse de coercivité. Soit v_0 quelconque dans $K(\varphi)$.

$$
\begin{aligned}
J(v,\varphi)-J(v_0,\varphi) &= \|v\|_V^p-\|v_0\|_V^p-\int_\Omega fv+\int_\Omega fv_0\\
&\quad+\iint_{\Omega\times\Omega}(v(x)-\varphi(y))_+\,dxdy-\iint_{\Omega\times\Omega}(v_0(x)-\varphi(y))_+\,dxdy\\
&\quad-\int_{\partial\Omega} gv+\int_{\partial\Omega} gv_0+\chi_{K(\varphi)}(v)\\
&\geqq \|v\|_V^p - C\|v\|_V - C,
\end{aligned}
$$

où l'on désigne par C des constantes diverses, et cette expression tend vers $+\infty$ indépendamment de φ dans $C^0(\bar{\Omega})$ lorsque $\|v\|_V$ tend vers $+\infty$.

Vérifions les hypothèses (iv) et (v), $\Phi = C^0(\bar{\Omega})$ étant ordonné par la relation "$\leqq$ partout dans $\bar{\Omega}$".

Vérification de l'hypothèse (iv)

Nous avons vu que u_φ est la solution du problème $\mathcal{P}_\varphi$ si et seulement s'il existe ψ dans $\beta(u_\varphi,\varphi)$ qui vérifie

$$(Au_\varphi+\psi-f)(v-u_\varphi)+\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \nu_A}-g\right)(v-u_\varphi)\geqq 0,$$

$$\forall v \in K(\varphi), \text{ avec } u_\varphi \in K(\varphi).$$

De même avec φ' remplaçant φ. Supposons $\varphi \leqq \varphi'$ presque partout. Il est possible de prendre

$$
\begin{aligned}
v = u_\varphi-(u_\varphi-u_{\varphi'})_+ &= \begin{cases} u_\varphi & \text{si} \quad u_\varphi \leqq u_{\varphi'},\\ u_{\varphi'} & \text{si} \quad u_\varphi \geqq u_{\varphi'}\end{cases}\\
&= \operatorname{Inf}(u_\varphi, u_{\varphi'})
\end{aligned}
$$

dans l'inégalité relative à φ. En effet un tel v est dans $W^{1,p}(\Omega)$ d'après Stampacchia [41], et dans $K(\varphi)$ puisque, sur $\partial\Omega$, $u_\varphi \geqq M\varphi$ et $u_{\varphi'} \geqq M\varphi' \geqq M\varphi$ (d'après l'hypothèse H_1), donc $v = \mathrm{Inf}(u_\varphi, u_{\varphi'}) \geqq M\varphi$. De même on peut prendre

$$v = u_{\varphi'} + (u_\varphi - u_{\varphi'})_+$$

dans l'inégalité relative à φ' (sur $\partial\Omega$, $v \geqq u_{\varphi'} \geqq M\varphi'$). On obtient alors

$$\int_\Omega (Au_\varphi + \psi - f)(u_\varphi - u_{\varphi'})_+ + \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \nu_A} - g\right)(u_\varphi - u_{\varphi'})_+ \leqq 0,$$

et

$$-\int_\Omega (Au_{\varphi'} + \psi' - f)(u_\varphi - u_{\varphi'})_+ - \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u_{\varphi'}}{\partial \nu_A} - g\right)(u_\varphi - u_{\varphi'})_+ \leqq 0,$$

et en ajoutant membre à membre

$$\int_\Omega (Au_\varphi - Au_{\varphi'})(u_\varphi - u_{\varphi'})_+ + \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \nu_A} - \frac{\partial u_{\varphi'}}{\partial \nu_A}\right)(u_\varphi - u_{\varphi'})_+ + \int_\Omega (\psi - \psi')(u_\varphi - u_{\varphi'})_+ \leqq 0.$$

Nous avons déjà vu que la dernière intégrale est positive (cf. Lemme 4). Il vient alors:

$$\int_\Omega (Au_\varphi - Au_{\varphi'})(u_\varphi - u_{\varphi'})_+ + \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial \nu_A} - \frac{\partial u_{\varphi'}}{\partial \nu_A}\right)(u_\varphi - u_{\varphi'})_+ \leqq 0,$$

mais suivant Mosco ([27] p. 123) on a la propriété de T-monotonie stricte:

$$\int_\Omega (Av - Av')(v - v')_+ + \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial v}{\partial \nu_A} - \frac{\partial v'}{\partial \nu_A}\right)(v - v')_+ \leqq 0 \Rightarrow (v - v')_+ = 0$$

pour tous v et v' dans $W^{1,p}(\Omega)$. Il suit que $u_\varphi \leqq u_{\varphi'}$ presque partout.

Vérification de l'hypothèse (v)'

Soit u_0 la solution de

$$(15)\qquad \begin{cases} Au_0 = f - |\Omega| & \text{dans } \Omega, \\ u_0 \geqq m_0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ \dfrac{\partial u_0}{\partial \nu_A} \geqq g & \text{sur } \partial\Omega, \\ (u_0 - m_0)\left(\dfrac{\partial u_0}{\partial \nu_A} - g\right) = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

En utilisant le Lemme 5, l'hypothèse H_2 et le fait que

$$\beta(u_\varphi, \varphi)(x) \subset [0, |\Omega|], \quad \text{p.p. } x \in \Omega,$$

on montre comme pour la vérification précédente que pour tout φ dans $C^0(\bar{\Omega})$

$$u_0 \leqq u_\varphi = T\varphi.$$

Ainsi que nous l'avons signalé, l'hypothèse (iii) n'est pas vérifiée. Supposons par exemple que M soit de la forme $N \circ T$ où T est l'opérateur trace $(C^0(\bar{\Omega}) \to C^0(\partial\Omega))$ et N est strictement croissant $(C^0(\partial\Omega) \to L^2(\partial\Omega))$. Soit alors φ dans $C^0(\bar{\Omega})$ et $v = M\varphi = N(\varphi|_{\partial\Omega})$. On peut trouver une suite φ_n qui tend vers φ dans $C^0(\bar{\Omega})$ par valeurs supérieures, c'est-à-dire $\varphi_n > \varphi$ partout dans $\bar{\Omega}$. Dans ce cas $M\varphi_n > M\varphi = v$ presque partout sur $\partial\Omega$, $J(v, \varphi_n) = +\infty$ (car v n'est pas dans $K(\varphi_n)$) et $J(v, \varphi) < +\infty$ (car v est dans $K(\varphi)$). Par suite on n'a pas: $\underline{\lim}\, J(v, \varphi_n) = J(v, \varphi)$, et l'hypothèse (iii) n'est pas vérifiée.

On peut cependant montrer la propriété de continuité ci-après.

LEMME 6. *Soit φ_n une suite qui converge vers φ dans $C^0(\bar{\Omega})$ en croissant (c'est-à-dire $\varphi_{n+1} \geqq \varphi_n$ partout, pour tout n) et soit v fixé dans $W^{1,p}(\Omega)$. Alors*

$$\underline{\lim}\, J(v, \varphi_n) = J(v, \varphi) \tag{16}$$

et $u_{\varphi_n} = T\varphi_n$ converge vers $u_\varphi = T\varphi$ dans $C^0(\bar{\Omega})$.

DÉMONSTRATION. Montrons que

$$\underline{\lim}\, \chi_{K(\varphi_n)}(v) \leqq \chi_{K(\varphi)}(v).$$

Si $\chi_{K(\varphi)}(v) = +\infty$, c'est évident. Sinon $v \in K(\varphi)$, et alors $v|_{\partial\Omega} \geqq M\varphi \geqq M\varphi_n$ presque partout (par la croissance de la suite φ_n et l'hypothèse H_1), c'est-à-dire $v \in K(\varphi_n)$. Alors $0 = \chi_{K(\varphi)}(v) = \chi_{K(\varphi_n)}(v)$ pour tout n, et l'inégalité requise est vérifiée. Les autres termes de $J(v, .)$ étant continus, on a

$$\underline{\lim}\, J(v, \varphi_n) \leqq J(v, \varphi),$$

et l'hypothèse (i) transforme cette inégalité en une égalité.

En reprenant alors la démonstration de la continuité de l'application T au Lemme 1, Chapître I, on constate que la seconde assertion du Lemme 6 s'établit comme dans cette démonstration.

Ce résultat permet tout de même de résoudre le problème (11) de façon constructive, en atteignant sa solution minimale.

THÉORÈME 2″. *Le problème* (11) *admet une solution minimale* $\underline{u}$ *dans* $W^{1,p}(\Omega)$. *Cette solution est obtenue comme limite (dans* $C^0(\bar{\Omega})$*) de la suite* u_n *définie par*:

$$(14)_n \qquad \begin{cases} Au_{n+1} + \beta(u_{n+1}, u_n) \ni f, \\ u_{n+1} \geqq Mu_n \quad \textit{sur } \partial\Omega, \\ \dfrac{\partial u_{n+1}}{\partial \nu_A} \geqq g \quad \textit{sur } \partial\Omega, \\ (u_{n+1} - Mu_n)\left(\dfrac{\partial u_{n+1}}{\partial \nu_A} - g\right) = 0 \quad \textit{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

u_0 *étant la solution de* (15).

DÉMONSTRATION. On montre comme au Chapitre I que u_n est une suite croissante de sous-solutions, et

$$u_n \nearrow \underline{\underline{u}} \quad \text{dans} \quad C^0(\bar{\Omega}).$$

D'après le Lemme 6, $u_{n+1} = Tu_n \nearrow T\underline{\underline{u}}$. D'où $\underline{\underline{u}} = T\underline{\underline{u}}$ est solution. On établit comme d'habitude que $\underline{\underline{u}}$ est la solution minimale, c'est-à-dire $\underline{\underline{u}} = \underline{u}$.

REMARQUE. Supposons que M envoie $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\partial\Omega)$ et vérifie:
M est croissant au sens $M\varphi \leqq M\varphi'$ p.p. sur $\partial\Omega$ dès que $\varphi \leqq \varphi'$ p.p. dans Ω.
Il existe m_0 et m^0 dans $L^2(\partial\Omega)$ tels que, pour tout φ de $L^2(\Omega)$,

$$m_0 \leqq M\varphi \leqq m^0 \quad \text{p.p. sur } \partial\Omega.$$

Par la dernière remarque du Chapitre I, on obtient alors l'existence d'une solution maximale $\bar{u}$ (et d'une solution minimale $\underline{u}$) dans $W^{1,p}(\Omega)$. (On pose alors $\Phi = L^2(\Omega)$—ainsi Φ est reflexif. L'hypothèse (v) est vérifiée avec un élément u^0 facile à définir.)

3. *Une généralisation du terme* $\beta(u)$

Nous avons vu au Paragraphe 1 que l'opérateur

$$u \to \beta(u) = \beta(u, u)$$

n'est pas monotone, mais que l'opérateur

$$(v, \varphi) \to \beta(v, \varphi)$$

possède une intéressante propriété de monotonie énoncée au Lemme 4. Nous définissons dans ce paragraphe une classe d'opérateurs qui possèdent la même propriété.

Suivant une suggestion de A. Pazy, nous généralisons les résultats du Paragraphe 1 en considérant des fonctionnelles de la forme

$$J(v,\varphi)=\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2-\int_\Omega fv+\int\int_{\Omega\times\Omega} j(x,y,v(x),\varphi(y))dxdy,$$

c'est-à-dire que l'on remplace la fonction en $(s-t)_+$ utilisée au Paragraphe 1 par une fonction de Carathéodory

$$j:\Omega\times\Omega\times\mathbf{R}\times\mathbf{R}\to\mathbf{R}$$

$$((x,y,s,t)\to j(x,y,s,t))$$

qui vérifie les hypothèses:

(a) Pour tous v dans $L^1(\Omega)$ et φ dans $L^2(\Omega)$, $(x,y)\to j(x,y,v(x),\varphi(y))$ est dans $L^1(\Omega\times\Omega)$. D'après M. A. Krasnosel'skii ([14], p. 20 à 32) l'application

$$(v,\varphi)\to\int\int_{\Omega\times\Omega} j(x,y,v(x),\varphi(y))$$

est alors continue sur $L^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$, et l'hypothèse (a) est équivalente à des conditions de croissance en s et t de la fonction j.

(b) Comme fonction de s, j est convexe et lipschitzienne uniformément par rapport aux autres variables, c'est-à-dire:

$$\exists M,\ \text{p.p. } x\in\Omega,\ \text{p.p. } y\in\Omega,\ \forall s_1,s_2\in\mathbf{R},\ \forall t\in\mathbf{R},$$

$$|j(x,y,s_1,t)-j(x,y,s_2,t)|\leqq M|s_1-s_2|.$$

(c) Soit $\partial_s j(x,y,s,t)$ le sous-différentiel par rapport à s de j au point (x,y,s,t). On suppose que, pour tous x,y dans Ω, $\partial_s j(x,y,.,.)$ est monotone au sens suivant:

$$\forall s,s',t,t'\in\mathbf{R},\ t\leqq t'\Rightarrow[\partial_s j(x,y,s,t)-\partial_s j(x,y,s',t')](s-s')_+\geqq 0.$$

Notons que ces hypothèses sont vérifiées en particulier si j est de la forme $k(s-t)$ où k est une fonction convexe lipschitzienne de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$. Dans ce cas, pour vérifier l'hypothèse (a), on note que:

$$|k(v(x)-\varphi(y))-k(w(x)-\psi(y))|\leqq M(|v(x)-w(x)|+|\varphi(y)-\psi(y)|),$$

d'où en particulier

$$|k(v(x)-\varphi(y))-k(0)|\leqq M(|v(x)|+|\varphi(y)|).$$

Et pour vérifier l'hypothèse (c), on note que, dans ce cas

$$[\partial_s j(x,y,s,t)-\partial_s j(x,y,s',t')](s-s')_+=[\partial k(s-t)-\partial k(s'-t')](s-s')_+\geqq 0$$

pour $t\leqq t'$ puisque le sous différentiel est un opérateur monotone.

On prend encore $V = H_0^1(\Omega)$ et $H = L^2(\Omega)$ ordonné comme plus haut. Nous allons montrer que les hypothèses (i) à (v) sont encore vérifiées, ce qui permet d'appliquer les résultats du Chapitre I.

Vérification de l'hypothèse (i)

Elle est immédiate à partir de (a) et de la compacité de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$.

Vérification de l'hypothèse (ii)–(ii)′

Seule l'uniforme coercivité n'est pas évidente. Elle s'établit comme au Paragraphe 1, en notant que

$$J(v,\varphi)-J(0,\varphi)=\frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2-\int_\Omega fv$$

$$+\int\int_{\Omega\times\Omega}[j(x,y,v(x),\varphi(y))-j(x,y,0,\varphi(y))]dxdy,$$

et que

$$\left|\int\int_{\Omega\times\Omega}[j(x,y,v(x),\varphi(y))-j(x,y,0,\varphi(y))]dxdy\right|\leqq M\int\int_{\Omega\times\Omega}|v(x)|dxdy$$

(d'après (b)).

Vérification de l'hypothèse (iii)

Elle est également immédiate d'après (a).

La vérification des hypothèses (iv) et (v) nécessite deux lemmes techniques.

Lemme 7. *Soit $G(v,\varphi)$ la fonctionnelle réelle définie sur $H_0^1(\Omega)\times L^2(\Omega)$ par:*

$$G(v,\varphi)=\int\int_{\Omega\times\Omega} j(x,y,v(x),\varphi(y))dxdy.$$

Le sous différentiel de G par rapport à v, noté $\partial_v G(v,\varphi)$ est l'ensemble des fonctions ψ de $L^\infty(\Omega)$ qui vérifient

$$\psi(x)=\int_\Omega v^*(x,y)dy \quad p.p.\ x\in\Omega, \tag{17}$$

où

$$v^*(x,y)\in\partial_s j(x,y,v(x),\varphi(y)) \quad p.p.\ (x,y)\in\Omega\times\Omega.$$

On a alors:

$$|\psi|_{L^\infty(\Omega)}\leqq M|\Omega|.$$

LEMME 8. *L'opérateur multivoque $\partial_v G(.,.)$ possède la propriété de monotonie ci-après:*

Pour tous v et v' dans $H_0^1(\Omega)$, pour tous φ et φ' dans $L^2(\Omega)$, l'inégalité

$$\varphi \leqq \varphi' \quad p.p. \text{ dans } \Omega$$

implique

$$\forall \psi \in \partial_v G(v, \varphi),\ \forall \psi' \in \partial_v G(v', \varphi'),\ \int_\Omega (\psi - \psi')(v - v')_+ dx \geqq 0.$$

REMARQUE. Comme au Lemme 4, l'opérateur $\partial_v G(., \varphi)$ est *T-monotone* au sens de Brezis–Stampacchia, et $\partial_v G(.,.)$ vérifie le même critère de monotonie que $\beta(.,.)$ plus haut.

DÉMONSTRATION DU LEMME 7. Comme au Lemme 3, on définit $g(L^1(\Omega) \to \mathbf{R})$ par

$$g(v) = \int\int_{\Omega\times\Omega} j(x, y, v(x), \varphi(y))dxdy$$

et l'on a pour v dans $H_0^1(\Omega)$

$$\partial_v G(v, \varphi) = \partial g(v).$$

Le Lemme 7 est alors une conséquence d'un résultat de C. Castaing ([8], Théorème 4, p. 1333). En utilisant ses notations, on définit $f(\Omega \times \Omega \times \mathbf{R} \to \mathbf{R})$ par

$$f(x, y, s) = j(x, y, s, \varphi(y))$$

et $A(L^1(\Omega) \to L^1(\Omega \times \Omega))$ par $Av(x, y) = v(x)$, p.p. $(x, y) \in \Omega \times \Omega$. Soit u dans $L^1(\Omega \times \Omega)$. Nous avons, grâce à (b)

$$|j(x, y, u(x, y), \varphi(y)) - j(x, y, 0, \varphi(y))| \leqq M|u(x, y)|,$$

donc $(x, y) \to j(x, y, u(x, y), \varphi(y))$ est dans $L^1(\Omega \times \Omega)$ par (a).

De même, pour u et v dans $L^1(\Omega \times \Omega)$,

$$|j(x, y, u(x, y), \varphi(y)) - j(x, y, v(x, y), \varphi(y))| \leqq M|u(x, y) - v(x, y)|.$$

Ainsi

$$I_f(u) = \int\int_{\Omega\times\Omega} f(x, y, u(x, y))dxdy$$

$$= \int\int_{\Omega\times\Omega} j(x, y, u(x, y), \varphi(y))dxdy$$

est bien défini pour u dans $L^1(\Omega\times\Omega)$ et l'application I_f est continue de $L^1(\Omega\times\Omega)$ dans $\mathbf{R}$. Il est clair que

$$g = I_f \circ A.$$

Le résultat de Castaing dit que

$$\partial g(v) = \{A^* v^* \mid v^* \in L^\infty(\Omega\times\Omega),$$
$$v^*(x,y) \in \partial_s j(x,y,v(x),\varphi(y)) \quad \text{p.p. } (x,y)\in\Omega\times\Omega\}.$$

On vérifie aisément que pour tout v^* dans $L^\infty(\Omega\times\Omega)$,

$$A^* v^*(x) = \int_\Omega v^*(x,y)dy, \quad \text{p.p. } x\in\Omega,$$

et que, par (b),

$$\text{p.p. } x,y\in\Omega,\ \forall s,t\in\mathbf{R},\ \forall s^*\in\partial_s j(x,y,s,t),\ |s^*|\leqq M.$$

Il suit que

$$\partial g(v) = \Big\{\psi\in L^\infty(\Omega) \mid \psi(x) = \int_\Omega v^*(x,y)dy \quad \text{p.p. } x\in\Omega,$$
$$v^*(x,y)\in\partial_s j(x,y,v(x),\varphi(y)) \quad \text{p.p. } (x,y)\in\Omega\times\Omega\Big\},$$

et que, si $\psi\in\partial g(v)$, $|\psi|_{L^\infty(\Omega)}\leqq M|\Omega|$.

Démonstration du Lemme 8. Soient v et v' dans $H_0^1(\Omega)$, φ et φ' dans $L^2(\Omega)$ tels que $\varphi\leqq\varphi'$ p.p., et soient ψ dans $\partial_v G(v,\varphi)$ et ψ' dans $\partial_v G(v',\varphi')$. D'après le Lemme 7,

$$\int_\Omega (\psi-\psi')(v-v')_+dx = \int\int_{\Omega\times\Omega} [v^*(x,y)-v^{*\prime}(x,y)](v-v')_+(x)dy$$

où, p.p. $(x,y)\in\Omega\times\Omega$,

$$v^*(x,y)\in\partial_s j(x,y,v(x),\varphi(y)),$$

et de même pour $v^{*\prime}$. Le résultat est alors une conséquence immédiate de (c). ■

Le problème d'I.Q.V. que l'on résout est alors

$$\text{(18)}\qquad \begin{cases} -\Delta u + \partial_v G(u,u)\ni f & \text{dans } \Omega,\\ u=0 & \text{sur } \partial\Omega,\end{cases}$$

et u_φ est l'unique solution du problème $\mathcal{P}_\varphi$ si et seulement si

(19)
$$\begin{cases} -\Delta u_\varphi + \partial_v G(u_\varphi, \varphi) \ni f & \text{dans } \Omega, \\ u_\varphi = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

le Lemme 7 montrant que la première ligne de (19) (par exemple) signifie en fait:

$$-\Delta u_\varphi + \psi = f \quad \text{p.p. dans } \Omega,$$

avec ψ dans $\partial_v G(u_\varphi, \varphi)$ (donc dans $L^\infty(\Omega)$).

On note, avec Agmon–Douglis–Nirenberg [1], que les solutions u_φ et u sont nécessairement dans $H^2(\Omega)$.

Vérification de l'hypothèse (iv)

Une fois le Lemme 8 établi, la démonstration est la même qu'au Paragraphe 1.

Vérification de l'hypothèse (v)

Soient u_0 et u^0, dans $H_0^1(\Omega)$, les solutions respectives de

(20)
$$\begin{cases} -\Delta u_0 = f - M|\Omega| & \text{dans } \Omega, \\ u_0 = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

et

(21)
$$\begin{cases} -\Delta u^0 = f & \text{dans } \Omega, \\ u^0 = 0 & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

La vérification de (v) est immédiate à partir de (19), du Lemme 7 et du principe du maximum.

De la même façon que l'on a établi le Théorème 2′, on montre alors le:

THÉORÈME 2″. *Le problème* (18) *admet une solution minimale* $\underline{u}$ *et une solution maximale* $\bar{u}$ *dans* $H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, *obtenues comme limites* (*dans* $(H_0^1(\Omega))$ *des suites* u_n *et* u^n *définies par*:

$(19)_n$
$$\begin{cases} -\Delta u_{n+1} + \partial_v G(u_{n+1}, u_n) \ni f & \textit{dans } \Omega, \\ u_{n+1} = 0 & \textit{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

$(19)^n$
$$\begin{cases} -\Delta u^{n+1} + \partial_v G(u^{n+1}, u^n) \ni f & \textit{dans } \Omega, \\ u^{n+1} = 0 & \textit{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

u_0 *et* u^0 *étant les solutions respectives de* (20) *et* (21). ∎

Dans cet article, nous avons été amenés assez naturellement à considérer des opérateurs multivoques. Signalons qu'il est possible, en utilisant les méthodes de l'analyse multivoque, de résoudre les problèmes du type

$$\begin{cases} -\Delta u \in g \circ \beta(u) & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

par exemple, ou même les problèmes à frontière libre, tels que

$$\begin{cases} u - \Delta u \begin{cases} = 0 & \text{si} \quad u \geqq 0, \\ \in g \circ \beta(u) & \text{si} \quad u < 0, \end{cases} \\ u = \text{constante inconnue sur } \partial\Omega, \\ \displaystyle\int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} = -1, \end{cases}$$

qui rappellent les équations de l'équilibre d'un plasma confiné dans une cavité. Pour cela nous renvoyons le lecteur à [29], [31], et [32].

Bibliographie

1. S. Agmon, A. Douglis and L. Nirenberg, *Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions*, I, Comm. Pure Appl. Math. **12** (1959), 623–727.

2. H. Amann, *On the existence of positive solutions of non-linear elliptic boundary value problems*, Indiana Univ. Math. J. **21** (1971), 125–146.

3. H. Amann, *Non-linear operators in ordered Banach spaces and some applications to non-linear boundary value problems*, Non-linear Operators and the Calculus of Variations, Brussels, Sept. 1975, Lecture Notes in Mathematics, Berlin–Heidelberg–New York, Springer, 1976

4. C. Baïocchi, *Studio di un problema quasi-variazionale connesso a problemi di frontiera libera*, Boll. Un. Mat. Ital. (4) **11**, Suppl. fasc 3 (1975), 589.

5. A. Bensoussan and J. L. Lions, C. R. Acad. Sci., Ser. A **276** (1973), 1189; A. Bensoussan, M. Goursat and J. L. Lions, C. R. Acad. Sci., Ser. A **276** (1973), 1279.

6. H. Brezis and G. Stampacchia, *Sur la régularité de la solution d'inéquations elliptiques*, Bull. Soc. Math. France **96** (1968), 153–180.

7. C. Castaing, *Le théorème de Dunford–Pettis généralisé*, C. R. Acad. Sci., Ser. A **268** (1969), 327–329.

8. C. Castaing, *Intégrales convexes duales*, C. R. Acad. Sci., Ser. A **275** (1972), 1331–1334.

9. I. Ekeland and R. Temam, *Analyse Convexe et Problèmes Variationnels*, Paris, Dunod–Gauthiers Villars, 1974 (English translation, Amsterdam, North Holland, 1975).

10. Ky-Fan, *Fixed point and minimax theorems in locally convex topological linear spaces*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **38** (1952), 121–126.

11. H. Grad, P. N. Hu and D. C. Stevens, *Adiabatic evolution of plasma equilibrium*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **72** (1975), 3789–3793.

12. B. Hanouzet and J. L. Joly, *Méthode d'ordre dans l'interprétation de certaines inéquations variationnelles et applications*, C. R. Acad. Sci., Ser. A **281** (1975), 373.

13. J. L. Joly and U. Mosco, *Sur les inéquations quasi-variationnelles*, C. R. Acad. Sci., Ser. A **279** (1974), 499.

14. M. A. Krasnosel'skii, *Topological Methods in the Theory of Non-Linear Integral Equations*, Pergamon Press, Oxford, London, New York, Paris, 1964.

15. J. M. Lasry and R. Robert, *Degré et théorèmes de points fixes pour les fonctions multivoques, applications*, Séminaire Goulaouic–Lions–Schwartz, Mars 1975.

16. J. L. Lions, *Problèmes aux Limites dans les Equations aux Dérivées Partielles*, Presses de l'Université de Montréal, 1962.

17. J. L. Lions, *Contrôle Optimal de Systèmes Gouvernés par des Equations aux Dérivées Partielles*, Paris, Dunod, Gauthier–Villars, 1968.

18. J. L. Lions, *Quelques Méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non-linéaires*, Paris, Dunod, Gauthier–Villars, 1969.

19. J. L. Lions, *Sur Quelques Questions d'Analyse, de Mécanique et de Contrôle Optimal*, Presses de L'Université de Montréal, 1976.

20. J. L. Lions, *Inéquations quasi-variationnelles*, Cours au Collège de France, 1974–1976, à paraître.

21. J. L. Lions and E. Magenes, *Problèmes aux Limites Non Homogènes*, Paris, Dunod 1968.

22. C. Mercier, *The magneto-hydrodynamic approach to the problem of plasma confinement in closed magnetic configurations*, Publication of EURATOM C.E.A., Luxembourg, 1974.

23. F. Mignot, *Inéquations variationnelles et contrôle*, Thèse, Paris, 1975.

24. F. Mignot and J. P. Puel, *Solution maximum de certaines inéquations d'évolution paraboliques, et inéquations quasi-variationnelles paraboliques*, C. R. Acad. Sci., Ser. A **280** (1975), 259.

25. F. Mignot and J. P. Puel, *Systèmes d'inéquations hyperboliques du premier ordre faiblement couplés, et inéquations quasi-variationnelles associées*, C. R. Acad. Sci., Ser. A **280** (1975), 423.

26. J. J. Moreau, *Fonctionnelles convexes*, Séminaire sur les équations aux dérivées partielles, Collège de France, 1966–1967.

27. U. Mosco, *Implicit variational problems and quasi-variational inequalities*, in *Nonlinear Operators and the Calculus of Variations*, Brussels, Sept. 1975, Lecture Notes in Mathematics, Berlin–Heidelberg–New York, Springer, 1976.

28. J. Mossino, *Sur certaines inéquations quasi-variationnelles apparaissant en physique*, C. R. Acad. Sci., Ser. A **282** (1976), 187.

29. J. Mossino, *Etude de quelques problèmes non-linéaires d'un type nouveau apparaissant en physique des plasmas*, Thèse, Université de Paris XI-Orsay, 1977.

30. J. Mossino, *Etude d'une inéquation quasi-variationnelle appaissant en physique*, in *Convex Analysis and its Applications*, Murat-le-Quaire, March 1976, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, Berlin–Heidelberg–New York, Springer, 1977.

31. J. Mossino and R. Temam, *Certains problèmes non linéaires de la physique des plasmas*, in *Mathematical Aspects of Finite Element Methods*, Rome 1975 Lecure Notes in Mathematics, Berlin–Heidelberg–New York, Springer, 1977.

32. J. Mossino and H. Gourgeon, *Sur un problème à frontière libre de la physique des plasmas (cas non coercif)*, à paraître.

33. J. Mossino and J. P. Zolesio, *Solution variationnelle d'un problème non linéaire de la physique des plasmas*, C. R. Acad. Sci., Ser. A, à paraître.

34. J. Nečas, *Les Méthodes Directes en Théorie de Equations Elliptiques*, Masson et Cie, Academia, 1967.

35. J. P. Puel, *Méthodes de sous et sur-solutions dans certains problèmes non linéaires et inéquations variationnelles*, Thèse, Paris, 1975.

36. J. P. Puel, *Existence, comportement à l'infini et stabilité dans certains problèmes quasi-linéaires elliptiques et paraboliques d'ordre* 2, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, Ser. IV, 3 (1976), 89–119.

37. R. Robert, *Contributions à l'analyse non linéaire*, Thèse, Université Scientifique et médicale de Grenoble, Institut National Polytechnique de Grenoble, 1976.

38. D. H. Sattinger, *Monotone methods in non-linear parabolic boundary value problems*, Indiana Univ. Math. J. **21** (1972), 11.

39. H. H. Schaefer, *Topological Vector Spaces*, Macmillan series in advanced mathematics and theoretical physics, The Macmillan Company, New York, Collier–Macmillan Limited, London, 1966.

40. S. L. Sobolev, *Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics*, Vol. 7, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1963.

41. G. Stampacchia, *Equations Elliptiques du Second Ordre à Coefficients Discontinuous*, Presses de l'Université de Montréal, 1966.

42. L. Tartar, *Inéquations quasi-variationnelles abstraites*, C. R. Acad. Sci., Ser. A **278** (1974), 1193.

43. R. Temam, *A nonlinear eigenvalue problem: The shape at equilibrium of a confined plasma*, Arch. Rational Mech. Anal. **60** (1975), 51–73.

44. R. Temam, *Applications de l'analyse convexe au calcul des variations*, Proc. Conf. on Non-linear Operators and the Calculus of Variations, Brussels, Sept. 1975, Lecture Notes in Mathematics, Berlin–Heidelberg–New York, Springer, 1976.

45. R. Temam, *Remarks on a free boundary value problem arising in plasma physics*, Comm. Part. Diff. Eq., **2** (1976), 563–585.

46. F. Terkelson, *a short proof of Fan's fixed point theorem*, Proc. Amer. Math. Soc. **42** (1974), 643–644.

ANALYSE NUMÉRIQUE ET FONCTIONNELLE
C.N.R.S. ET UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD
BÂTIMENT 425
ORSAY 91405, FRANCE